Concursul Fractal

A doua Ediție, 8 Decembrie 2024

Problema 1. Viorel are 10 ani, iar mama sa are 31, peste câți ani va avea Viorel jumătate din vârsta mamei?

Soluție: Este clar că diferența dintre vârsta lui Viorel și a mamei, care este de 21 de ani rămâne aceeași mereu, astfel, atunci când mama sa are dublul vârstei lui Viorel, diferența este egală cu vârsta lui. Deci condiția va avea loc atunci când Viorel va avea 21 de ani. Este clar că Viorel va avea 21 de ani peste 11 ani, astfel răspunsul este 11.

Problema 2. Trei haiduci au intrat seara într-un han și au comandat cartofi copți. Aceștia s-au înțeles ca primul haiduc să mănânce jumătate din toți cartofii, al doilea să mănânce o treime, iar al treilea, o șăsime. Cum erau obosiți însă, aceștia au adormit. După ce li s-au adus cartofii, în mijlocul nopții s-a trezit primul haiduc, a mâncat jumătate din cartofi și s-a culcat. Apoi s-a trezit al doilea și a mâncat o treime din carforii rămași pe masă și la fel s-a culcat. În sfârșit, spre dimineață, s-a trezit și al treilea haiduc și a mâncat o șăsime din cartofii rămași, și la fel a adormit la loc. Dimineața, aceștia au văzut că pe masă au rămas 10 cartofi. Câți cartofi au comandat haiducii?

Soluție: Putem afla răspunsul pornind de la numărul de cartofi rămași și mergând invers. În primul rând, după ce al treilea haiduc a mâncat o șăsime din cartofi, au rămas 10, astfel înainte ca el să-i mănânce, erau $10 \times 6/5$ adică 12 cartofi. La fel, înainte ca al doilea să mănânce, erau $12 \times 3/2 = 18$ cartofi, și în final, înainte ca primul haiduc să mănânce erau $18 \times 2 = 36$ cartofi.

Problema 3. Câteva echipe de fotbal au jucat un turneu, în cadrul căruia, fiecare echipă a jucat câte un joc cu fiecare echipă adversară. Este oare posibil ca să fi avut loc în total 2024 de jocuri?

Soluție: Dacă în turneu erau n echipe, cum fiecare a jucat câte $n-1$ meciuri, putem vedea că prima echipă a jucat $n-1$ meciuri, a doua a jucat un meci cu prima și încă $n-2$, apoi, a treia a jucat alte $n-3$ jocuri diferite, și așa mai departe. Astfel, au fost jucate $1+2+\ldots n-2+n-1$ meciuri, adică $\frac{n(n-1)}{2}$. Acum, vrem să vedem dacă numărul 2024 poate fi scris ca produsul a două numere consecutive împărțit la 2. O modalitate ar fi să observăm că $\frac{63\times 64}{2} = 2016 < 2025 < 2080 = \frac{64\times 65}{2}$. La fel, putem observa că numerele de forma $\frac{n(n-1)}{2}$ pot da restul 0 sau 1 la împărțire la trei, pe când, 2024 dă restul 2.

Problema 4. Arătați că:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2023^2} + \frac{1}{2024^2} < 2$$

Soluție: E clar că pentru orice număr natural x, $x \leq x^2$, deci $\frac{x^2+x}{2} \leq x^2$, sau $\frac{1}{x^2} \leq \frac{2}{x^2+x}$.
Astfel: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2023^2} + \frac{1}{2024^2} \leq \frac{2}{1\cdot 2} + \frac{2}{2\cdot 3} + \ldots \frac{2}{2023\cdot 2024} + \frac{2}{2024\cdot 2025}$.
Din proprietatea $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, e clar că suma $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} \ldots + \frac{1}{2024\cdot 2025}$ este egală cu $1 - \frac{1}{2025} < 1$.
Concludem, astfel că suma din problemă e strict mai mică decât 2.